

LISTA 2

1. Determine as soluções das seguintes equações diferenciais:

(a) $(2x + y^3 e^x)dx + (3y^2 e^x)dy = 0$

(b) $(2y + x)y' + (2x + y) = 0$

2. Resolva a equação $(3x^2 y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$, encontrando um fator integrante dependendo só de x .

3. Resolva a equação $y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$, usando um fator integrante dependendo só de y .

4. Resolva a equação diferencial abaixo encontrando um fator integrante dependendo só de x :

$$2x^{-2}e^x - xy^2 + 2xyy' = 0 .$$

5. Resolva a equação diferencial abaixo encontrando um fator integrante dependendo só de y :

$$(3y + y^2 + (2 + y) \operatorname{sen} x) y' + y \cos x = 0 .$$

6. Resolva a equação diferencial

$$2xy + (2x^2 - 2x^2 y + 3ye^{2y})y' = 0$$

encontrando um fator integrante dependendo só de y .

7. (a) Justifique que para que uma equação diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ admita um fator integrante $\mu = \mu(y)$, dependendo só de y , é necessário que $\frac{M_y - N_x}{M}$ dependa só de y .

(b) Analise a situação análoga à do item (a), com a diferença que agora o fator integrante $\mu = \mu(x)$, dependendo só de x . Enuncie a condição necessária neste caso, justificando sua resposta.

8. Verifique que a equação

$$(1 + e^x)y - (x + e^x)y' = 0$$

admite um fator integrante dependendo só de y e também fator integrante dependendo só de x . Resolva a equação de duas maneiras, cada vez empregando um dos fatores integrantes.

Resolva:

9. $xy' - y = x^2 \sin x$

12. $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} - xy = 1$

10. $y' + y \tan x = x \sin x \cos x$, $y(0) = 2$

13. $y' = e^{2x} + y - 1$, $y(0) = 1$

11. $(x + 2)^2 y' = 5 - 8y - 4xy$

14. $2xy + 3x^2 + (x^2 + 2) \frac{dy}{dx} = 0$

15. Resolva a equação $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right) dy = 0$ procurando x como função de y (portanto considerando $\frac{dx}{dy}$).

16. Seja $u = u(t)$ a temperatura no instante t de um corpo imerso em um meio de temperatura constante u_m . A lei do resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de u é diretamente proporcional à diferença $u - u_m$, isto é, $\frac{du}{dt} = -k(u - u_m)$. Se um corpo aquecido a 120°C é posto em um ambiente a 30°C e sabe-se que em 5 min sua temperatura é de 90°C , encontre a expressão de u como função de t . Em quanto tempo será atingida a temperatura de 45°C ?

17. No instante $t_0 = 0$ um tanque contém 200l de solução contendo 1 grama de corante por litro. Água pura entra no tanque à razão de 2 l/min e mistura sai à mesma razão. Quanto tempo transcorre até que a concentração de corante atinja 1% da concentração original?

18. Uma população de mosquitos, na ausência de outros fatores, aumenta a uma razão em cada instante proporcional à população corrente.

(a) Sabendo que a população dobra a cada semana e que no instante inicia $t_0 = 0$ é de 200.000 indivíduos, encontre a expressão do número de indivíduos em função do tempo.

(b) Resolva o mesmo problema do item (a), supondo agora que exista uma espécie de pássaros predadores, que comem 20.000 mosquitos por dia (ou, 140.000 por semana, se você preferir usar a semana como unidade de tempo). A população de mosquitos vai se tornar extinta ou não? Justifique sua resposta.

19. Uma força eletromotriz de $100\cos t$ é aplicada a um circuito RC em série no qual a resistência é de 100 ohms e o capacitor de 10^{-4} farad.

(a) Determine a carga no capacitor no instante t , sabendo que a carga inicial é $Q(0) = 0$.

(b) Determine a carga estacionária do capacitor.

RESPOSTAS

1. (a) $x^2 + y^3 e^x = C$

(b) $x^2 + y^2 + xy = C$

2. $(3x^2 y + y^3) e^{3x} = C$, $y = 0$

3. $x e^{2y} - \ln |y| = C$, $y = 0$

4. $y^2 e^{-x} - x^{-2} = C$

5. $(y + \operatorname{sen} x) y^2 e^y = C$

6. $x^2 y^2 e^{-2y} + y^3 = C$

7. (b) É necessário que $\frac{M_y - N_x}{N}$ dependa só de x .

8. Fatores integrantes: $\mu_1(y) = y^{-2}$ e $\mu_2(x) = (x + e^x)^{-2}$

Solução geral: $y = C(x + e^x)$

9. $y(x) = x(C - \cos x)$

10. $y = (-x \cos x + \operatorname{sen} x + 2) \cos x$

11. $y = \frac{5}{3(x+2)} + C \frac{1}{(x+2)^4}$

12. $y = x + C \sqrt{1+x^2}$

13. $y = 1 - e^x + e^{2x}$

14. $y = \frac{C - x^3}{x^2 + 2}$

15. $xy + y \cos y - \operatorname{sen} y = C$

16. (b) $u(t) = 30 + 90 \cdot e^{-\frac{t(\ln 3 - \ln 2)}{5}} = 30 + 90 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{t}{5}}$, $t_1 = \frac{5(\ln 3 + \ln 2)}{\ln 3 - \ln 2} \approx 22.09$ min.

17. $100 \ln 100 \approx 460.51$ min.

18. (a) $Q(t) = 200\,000 e^{t \ln 2} = 200\,000 2^t$, t medido em semanas.

(b) $Q(t) = \left(200\,000 - \frac{140\,000}{\ln 2}\right) e^{t \ln 2} + \frac{140\,000}{\ln 2}$. Como o coeficiente da exponencial é negativo, para um t suficientemente grande $Q(t)$ vai se anular. Logo a população de mosquitos se torna extinta. Fazendo os cálculos, encontramos que ela se torna extinta em aproximadamente 6.67 semanas.

19. (a) $Q(t) = -\frac{100}{10001} e^{-100t} + \frac{100}{10001} \operatorname{cost} + \frac{1}{10001} \operatorname{sent}$.

(b) $Q_s = \frac{100}{10001} \operatorname{cost} + \frac{1}{10001} \operatorname{sent}$.